2°/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 1-(f(x))^2$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$.

3°/ Etudier les variation de f.

4°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$. Expliciter f^{-1}.

5°/a) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_f au point O.

b) Etudier la position de C_f et (T).

6°/ Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 4 :

A) Soit $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$: $x\mapsto e^x-x-1$.

1°/ Etudier les variations de h.

2°/ En déduire que $\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x \geq x+1$.

B) Soit $g:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$: $x\mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x\cdot e^{2x}} & \text{si } x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

1°/ Prouver que g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ Prouver que $\forall x>0$, $e^{-2x} < g(x)$.

3°/a) Calculer pour tout $x>0$, $g'(x)$.

b) Prouver que $\forall x>0$, $g'(x) < -e^{-2x}$.

4°/a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Former le tableau de variations de g.

5°/ Montrer que g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 5 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$: $x\mapsto \begin{cases} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x>0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que $D_f=\mathbf{R}$.